

УТВЕРЖДАЮ

Директор АНОО «Физтех-лицей»
им. П.Д. Капицы

М.Г. Машкова

2024г.

Экзаменационная работа
(демоверсия)

МАТЕМАТИКА

2023-2024 учебный год

8 класс

АЛГЕБРА

1. Упростите выражение

$$\left(\frac{1}{6x^2-7x+1} - \frac{1}{6x-1}\right) : \frac{x^2-4}{1-6x} \text{ ИЛИ } \left(\frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{7}-a}{\sqrt{7}}\right) : \frac{49-3a^2}{\sqrt{21}} + \frac{1}{\sqrt{3a-7}}$$

ИЛИ $\frac{1}{\sqrt{17-4\sqrt{9+4\sqrt{5}}}}$.

2. Решите уравнение

а) $|x^2 - 4| + 1 = 2x$ ИЛИ $(x^2 + 3x + 1)(x^2 + 3x + 3) + 1 = 0$

б) $|x^2 + 5x| = |x^2 - 3x|$ ИЛИ $\frac{x+3}{4x^2-9} - \frac{3-x}{4x^2+12x+9} = \frac{2}{2x-3}$.

3. Решите неравенство

$$\frac{5x+4}{x+3} - \frac{x+2}{1-x} \geq \frac{4x^2}{(x+3)(x-1)} \text{ ИЛИ } |x^2 - 5x - 14| + (x+2)^2 \leq 0.$$

4. Решите систему уравнений: $\begin{cases} 3x + 10|y| = 19, \\ 5|y| - 4x = -7; \end{cases}$ ИЛИ $\begin{cases} \frac{9}{x+y} + \frac{2}{x-y} = 3; \\ \frac{18}{x+y} - \frac{5}{x-y} = -3. \end{cases}$

5. Решите систему неравенств: $\begin{cases} 0 \leq x < 3, \\ x > 2, \\ x(x^2 + 2x - 3) < 0. \end{cases}$

6. Не вычисляя корней уравнения $3x^2 + 8x - 1 = 0$, найдите $x_1x_2^3 + x_2x_1^3$.

ИЛИ

Пусть x_1 и x_2 - корни уравнения $2x^2 - 7x - 3 = 0$. Составьте квадратное уравнение, корнями которого являются числа $\frac{1}{x_1}$ и $\frac{1}{x_2}$.

7. Найдите область определения функции $y = \frac{1}{\sqrt{x^2-6x+9}} + \sqrt{\frac{3x+2}{5-x}}$.

8. Постройте график функции: $f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x+1}, & \text{если } x < -1, \\ \sqrt{|x|}, & \text{если } -1 < x < 1, \\ x^2 - 5x + 5, & \text{если } 1 \leq x \leq 5. \end{cases}$

9. Катер прошёл 45 км по течению реки и 28 км против течения, затратив на весь путь 4 ч. Найдите скорость течения, если собственная скорость катера составляет 18 км/ч.

ИЛИ

Двое рабочих, работая вместе, могут выполнить производственное задание за 20 дней. За сколько дней может выполнить это задание каждый из них, работая самостоятельно, если одному для этого требуется на 9 дней больше, чем другому?

10. При каких значениях параметра a неравенство $ax^2 + ax + 1 < 0$ не имеет решений?

ИЛИ

При каких значениях параметра a данное уравнение имеет не более одного корня:
 $(2a - 1)x^2 - ax + 1 = 0$.

ГЕОМЕТРИЯ

1. Высота параллелограмма, проведённая из вершины тупого угла, равного 150° , равна 2 см и делит его сторону пополам. Найдите диагональ параллелограмма, проведённую из вершины тупого угла, и углы, которые она образует со сторонами.

ИЛИ

2. Сторона BC параллелограмма $ABCD$ вдвое больше стороны AB . Биссектрисы углов A и B пересекают прямую CD в точках M и N , причем $MN = 12$. Найдите стороны параллелограмма.

3. Диагонали равнобедренной трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC пересекаются в точке O . Периметры треугольников BOC и COD относятся как 2:3, $AC = 20$. Найдите длины отрезков AO и OC .

ИЛИ

Перпендикуляр, проведенный из точки окружности к ее диаметру, делит диаметр на отрезки 2 и 18. Найдите расстояние от этой точки до концов диаметра и длину перпендикуляра.

4. Окружность с центром O касается сторон MN, NK и MK треугольника MNK в точках A, B, C соответственно. Найдите градусные меры дуг AB, BC и AC и углы треугольника ABC , если $\angle MNK = 72^\circ, \angle NKM = 64^\circ$.

5. Высота трапеции делит большее основание на отрезки 1 и 9. Найдите высоту, стороны и диагонали трапеции, если известно, что центр описанной около этой трапеции окружности лежит на большем основании.

ИЛИ

В равнобедренном треугольнике точка E - середина основания AC , а точка K делит сторону BC в отношении 2:5, считая от вершины C . Найти отношение, в котором прямая BE делит отрезок AK .

6. В треугольнике ABC основание высоты BH лежит на стороне AC . $BH = 8$ см, а $\cos \angle A = \frac{3}{5}, \sin \angle C = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Найдите периметр треугольника ABC .

7. На стороне AC треугольника ABC отмечена точка K так, что $AK:KC = 2:1$. Отрезок BK пересекает биссектрису AM треугольника ABC в точке P . Найдите площадь треугольника ABP , если площадь треугольника ABC равна 36 и известно, что $AB:AC = 4:3$.

8. В равностороннем треугольнике ABC точки M, N, K - середины сторон AB, BC, CA соответственно. Докажите, что $BMKN$ - ромб.

ИЛИ

Известно, что около четырёхугольника $ABCD$ можно описать окружность и что продолжения сторон AB и CD четырёхугольника пересекаются в точке M . Докажите, что треугольники MBC и MDA подобны.