

УТВЕРЖДАЮ

Директор АНОО «Физтех-лицей»
им. П.Л. Капицы

М.Г. Машкова

2024

Экзаменационная работа
(демоверсия)

МАТЕМАТИКА

2023-2024 учебный год

10 класс

(математический профиль)

ГЕОМЕТРИЯ

1. Дана пирамида, в основании которой лежит квадрат $ABCD$ со стороной $2\sqrt{2}$. Высота пирамиды $OE = 4$. Найдите косинус угла между плоскостями VCE и DEC .
2. Прямая a пересекает перпендикулярные друг другу плоскости в точках M и N . Расстояния от этих точек до линии пересечений плоскостей: $MO_1 = 3\sqrt{2}$ и $NO_2 = 3\sqrt{2}$, где O_1 и O_2 - точки, лежащие на линии пересечения плоскостей. Длина отрезка MN равна 6. Найдите углы, которые отрезок MN образует с данными плоскостями.
3. В кубе $ABCA_1B_1C_1D_1$ с ребром 2 найдите расстояние от точки C до плоскости BDC_1 .
4. В основании прямой призмы $ABCA_1B_1C_1D_1$ лежит квадрат со стороной 2, а высота призмы равна 1. Точка E лежит на диагонали BD_1 , причем $BE = 1$.
 - (a) Постройте сечение призмы плоскостью A_1C_1E .
 - (b) Найдите угол между плоскостью сечения и плоскостью ABC .
5. Основание наклонной призмы $ABCA_1B_1C_1$ - равносторонний треугольник ABC . Боковые грани AA_1B_1B и AA_1C_1C - равные ромбы с острым углом при общей вершине A .
 - (a) Докажите, что боковая грань BB_1C_1C - квадрат.
 - (b) Найдите расстояние от вершины A до плоскости BB_1C_1 , если $\angle CAA_1 = \pi/3$, а сторона основания призмы равна $\sqrt{2}$.
6. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ M - точка пересечения медиан основания ABC , а N - центр боковой грани AA_1B_1B .
 - (a) Постройте точку пересечения прямой MN с плоскостью $A_1B_1C_1$.

- (b) Найдите угол между прямой MN и плоскостью BB_1C , если известно, что $AB/AA_1 = 2\sqrt{3}$.
7. Дана правильная шестиугольная призма $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$. Точка P - середина бокового ребра CC_1 .
- (a) Постройте точку пересечения прямой BP с плоскостью AA_1F .
- (b) Найдите расстояние между прямыми BP и AB_1 , если сторона основания призмы равна 6, а боковое ребро равно $2\sqrt{3}$.
8. Сторона основания ABC правильной треугольной пирамиды $ABCD$ равна 6, а площадь сечения, проходящего через ребро AB и середину бокового ребра CD , равна $6\sqrt{6}$.
- (a) Докажите, что плоскость сечения образует с плоскостью основания угол $\pi/4$.
- (b) Найдите объем пирамиды $ABCD$.
9. Основания четырехугольной пирамиды $SABCD$ - параллелограмм $ABCD$. Через середину ребра SC и точку A проведена плоскость, параллельная диагонали BD основания. Пусть P - точка пересечения этой плоскости с прямой CD .
- (a) Докажите, что D - середина отрезка CP .
- (b) Найдите объем большей из частей, на которые эта плоскость разбивает пирамиду, если объем пирамиды равен V .
10. Дана правильная четырехугольная пирамида $SABCD$ с вершиной S . Апофема пирамиды вдвое больше стороны основания. Плоскость α проходит через ребро AB и делит пополам двугранный угол пирамиды при этом ребре.
- (a) Докажите, что плоскость α делит высоту пирамиды в отношении 4:1, считая от вершины S .
- (b) Найдите объем большей из частей, на которые пирамида разбивается плоскостью α , если сторона основания пирамиды равна $\sqrt{15}$.